Les mathématiques cachées de la musique : exemple de la gamme en musique et des fugues de J. S. BACH

Réalisé par : Mme BINET A.

Sous la direction de : M. BALANDRAUD E.

Université de BORDEAUX, département licence, Licence 2 de Mathématiques et informatiques.

Les mathématiques cachées de la musique : exemple de la gamme en musique et des fugues de J. S. BACH

Réalisé par : Mme BINET Anaïs

Année universitaire 2020-2021

Sous la direction de : M. BALANDRAUD Eric enseignant chercheur à l'université de BORDEAUX

Sommaire

Introduction :

Les liens entre musique et mathématiques sont plus étroits qu'on ne le pense. Quand on pense schémas mathématiques dans la musique on pense souvent en premier lieu au nombre d'or, mais il y en a tellement. L'œuvre intitulée Musique pour violon, percussions et Célesta de Bella Bartók est un exemple d'utilisation du nombre d'or dans la construction de la forme d'une œuvre, c'est-à-dire que la taille des mouvements et des parties de mouvement en nombre de mesures dévoile après analyse musicale le nombre d'or à quelques décimales prêt.

Nous pouvons citer deux citations de Leibnitz de 1712 qui présente la musique comme ayant un lien dissimulé avec les mathématiques et c'est certains de ces liens que nous allons essayer de montrer ici à une moindre mesure :

« La musique est un exercice d'arithmétique secrète et celui qui s'y livre ignore qu'il manie des nombres » Leibnitz, 1712.

« La musique est un exercice caché d'arithmétique tel que l'esprit ignore qu'il compte » Leibnitz, 1712.

Toute l'architecture de la musique en commençant par la gamme est une construction mathématique. L'harmonie peut être considéré comme une succession de rapports numériques, les intervalles une distance entre deux fréquences et donc ont un rapport (une fraction) mathématique. Même si de prime abord il n'est pas aisé de dégager des nombres, des relations, des rapports, des schémas, des symboliques mathématiques des œuvres musicales on pourrait penser que certains compositeurs se sont amusés en dissimuler, mais c'est qu'après une longue analyse à la fois musicale, mathématique et algorithmique qu'il est possible de déceler parfois des sens cachés derrière les notes. Cependant à moins qu'il y ait une trace écrite de cette volonté du compositeur nous ne pouvons pas affirmer que cette démarche était intentionnelle.

Au cours de l'histoire, les compositeurs ont plus ou moins jouer avec ses schémas mathématiques, celui qui est considéré comme un des plus grands mathémusiciens serait Jean Sébastien Bach. L'œuvre de Bach était considérée par ses contemporains et descendants proches comme trop compliquée, étrange et pas accessible. Ce n'est que plus tard que sa musique fut appréciée. Pourquoi sa musique paraît-elle si compliquée ? De nombreux chercheurs se sont mis à chercher une logique mathématique dans l'œuvre de Bach, voire même algorithmique. Ils travaillèrent notamment sur la symbolique des nombres qu'ils pouvaient dégager de la structure de ses œuvres. Les recherches ne se sont pas arrêtées à la dimension mathématique et avec l'apparition de la technologie se sont étendues à une dimension algorithmique. Cependant, ce statut peut être discuté, car beaucoup d'autres compositeurs ont fait un travail, plus ou moins poussé, comme lui avant ou après dans l'histoire. Nous pouvons dire cependant qu'il est plus apparent que Jean-Sébastien Bach est joué avec les schémas mathématiques de la musique comparée à Mozart qui lui était plutôt spécialiste de la mélodie.

Nous demanderons ici alors dans quelle mesure la musique est une construction mathématique ? Nous traiterons cependant que deux exemples de liens qui seront les suivants :

Nous nous intéresserons ici plus précisément à la gamme pythagoricienne qui est après quelques modifications donna la gamme que nous connaissons aujourd'hui et la tonalité. Nous essaierons donc dans une première partie de répondre à la question suivante : en quoi les gammes et/ou les modes sont-ils construits mathématiquement ?

Puis nous étudierons ensuite un certain genre musical dans l'œuvre de Bach qui est la fugue. On retrouve des fugues dans de nombreux de morceaux, c'est souvent qu'une seule partie d'une œuvre. Nous nous attacherons dans ses fugues à rechercher des matrices prédictives. Nous expliquerons plus loin ce que nous entendons par matrice prédictive. Donc cette seconde partie visera à répondre à la question suivante : comment pouvons-nous déceler des matrices prédictives dans les fugues de Bach et à quoi cela peut-il servir pour les musicologues ?

Chapitre 1 : Les mathématiques caché de la gamme en musique

I - La gamme pythagoricienne pour les musicologues

A) Le monocorde et la découverte des aspects scientifiques de la musique

On raconte dans certains traités antiques et médiévaux qu'en se promenant aux abords d'une forge, Pythagore fut interpellé par le fait que les sons produits par deux hommes frappant à l'aide de marteau sur une même enclume étaient différents. Ce qui causait cette différence de sons était la différence de poids entre les deux marteaux. Pythagore observa également les intervalles entre les deux sons et commença alors à voir que certains intervalles sont harmonieux, consonant et d'autres non. Il vérifia par la suite ses observations en créant un instrument qui s'appelle le monocorde.

Le monocorde est un instrument ce compose d'une une longue caisse rectangulaire sur laquelle une corde est tendue au moyen de deux chevilles ou bien d'une cheville fixe et d'un poids qu'y peut varier. La corde mesure un mètre et est posée sur une table sur lequel sont inscrits décimètres, centimètres et millimètres. Un chevalet (morceaux de bois placé entre la table et la corde) mobile permet de divisé la cordes.

Il expérimenta avec différentes divisions de la corde plus on moins longues et différentes cordes. Il pinçait la corde et analysé le son produit en le comparent à l'autre son produit par le passée avec d'autres paramètres. Il découvre ainsi que plus la corde est grosse, longue et lourde plus le son et grave. Inversement plus la corde est fine, courte et légère plus le son et aiguë.

Quand on pince la corde entière on obtient un son que l'on appel la fondamental dont le rapport s'exprime par la fraction 2/1. Puis quand on divise la corde en 2 on obtient la même note mais un octave plus aiguë. Le rapport de l'octave s'exprime donc par la fraction 1/2. Puis quand on place le chevalet à 1/3 de la corde on obtient une quinte (note à distance que 5 notes de la fondamental) du coté le plus long Cad. le coté représentant les 2/3 de la corde initiale et du coté le plus court soit 1/3 de la corde on obtient la quarte de la quinte.

On retrouve notamment la représentation de ses nombres dans la célèbres fresque de Raphaël L'École d'Athènes. En effet on peut y voir un jeune homme présentant à Pythagore un schéma sur une tablette noir qui représente les 3 intervalles consonants à la base de l'harmonie pythagoricienne.

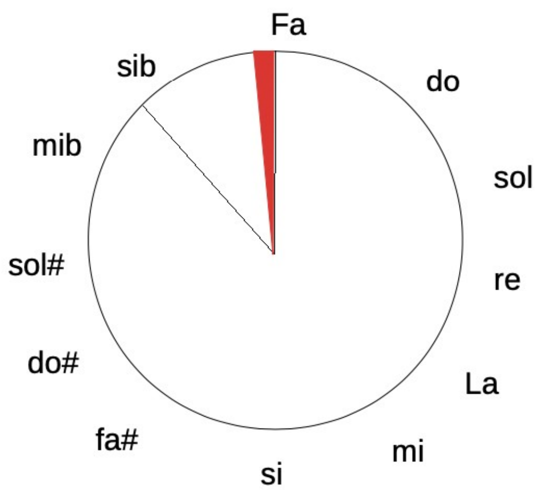
B) La gamme de Pythagore

Pour trouver la fréquence de l'octave au-dessus d'une note donnée on multiplie la fréquence de cette note par 2, et pour la quinte on multiplie par 3/2. On observe ici que l'on multiplie par l'inverse des fractions déduites de l'expérience du monocorde. Ainsi quand on veut monter de 7 octaves on multiplie par 2^7 ce qui vaut 128 et pour monter de 12 quintes on multiplie par $(\frac{3}{2})^{12}$ se qui vaut environ 129,75. On remarque ici que pour monter de 7 octaves ou 12 quintes il faut multiplier la fréquence de départ par des nombres qui sont très proches. La différence entre ces deux nombres sera appelée plus tard le comma (1 ton ou autrement dit l'intervalle de seconde est composé de 9 commas) pythagoricien.

En déterminant les 12 quintes successives, on retrouve les 12 notes de la gamme pythagoricienne. Cependant, ce sont les disciples de Pythagore qui créèrent cette gamme d'après les expériences de Pythagore. De plus cette gamme pythagoricienne comporte onze quintes justes et une quinte fausse, car comme nous l'avons vu précédemment quand on prend la 12e quinte et la 7e octave d'une note donnée on note une différence dans les deux fréquences alors qu'elle devrait être similaire. Il faut alors diminuer la 12e quinte pour retomber sur l'octave juste et on appelle cette 12e quinte la « quinte du loup ».

C) Le problème de la quinte du loup

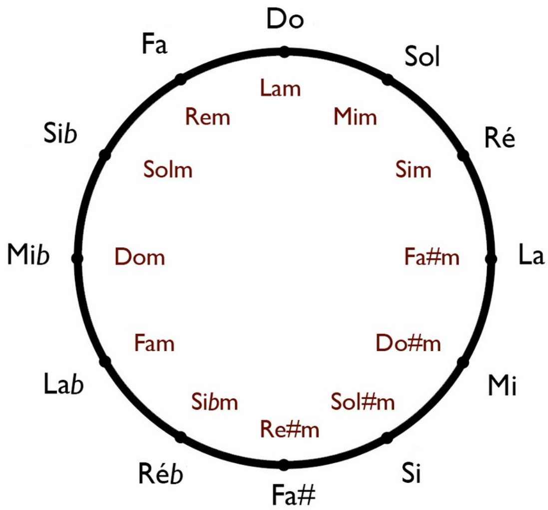
Cependant dans une gamme pythagoricienne, l'une des quintes n'est pas pure. À la fin du cycle on ne reviendrait pas exactement à l'a notre point de départ. Cette quinte qui n'est pas pure est appelée quinte du Loup. Elle rappareillerait comme ça, car elle rappareillerait le hurlement du loup qui n'est pas consonant avec les autres. L'écart entre la quinte du Loup et la quinte pure est alors appelé comma pythagoricien. Les compositeurs essayés alors de position cette quinte sur un intervalle peu utilisé. Ils plaçaient généralement la quinte de Loup alors sur l'intervalle si et fa#. De plus les gammes de Pythagore sont tempérées, mais inégales cela pose alors un problème pour la transposition.



II – Des gammes pythagoriciennes sous le prisme des mathématiques

A) Le cycle des quintes existe-t-il réellement ?

Comme nous l'avons vu précédemment Pythagore a créé ce qu'on appelle le cycle de quinte qui consiste en une progression en quinte successive. Ces quintes peuvent être soit ascendantes, descendantes.



Pour obtenir la fréquence de la quinte supérieure, nous avons vu qu'il fallait multiplier par 3/2. Soit f_0 la fréquence du son duquel on part on obtient la quinte en faisant $\frac{3}{2}$ x f_0 et ainsi de suite. On a donc f_1 = x $f_1 = \frac{3}{2}$ x f_0 puis $f_2 = \frac{3}{2}$ x f_1 … On a donc une suite (f_n) avec $n \in \mathbb{N}$ défini par : $f_{n+1} = \frac{3}{2}$ x f_n. Or il est d'usage de ramener à une octave, c'est à dire que si la fréquence obtenue est supérieure a 2f on la divise par 2 pour quel reste dans l'intervalle [f_0, 2f [. La suite est donc définie comme suit :

$$f_{n+1} = \frac{3}{2} \times f_n \text{ si } \frac{3}{2} \times f_n < 2f$$

$$f_{n+1} = \left(\frac{3}{2} \times f_n\right) / 2 \text{ si } \frac{3}{2} \times f_n \geq 2f$$

On a donc : $f_n = \frac{3^n}{2^n} \times \frac{1}{2^p}$ x f avec p définie tel que l'on peut vérifier par récurrence.

Dans le même principe on a le cycle des quintes descendantes avec :

$$f_{n+1} = \frac{2}{3} \times f_n \text{ si } \frac{2}{3} \times f_n \geq f$$

$$f_{n+1} = \left(\frac{2}{3} \times f_n\right) \times 2 \text{ si } \frac{2}{3} \times f_n < f$$

On a donc : $f_n = \frac{2^n}{3^n} \times 2^p \times f$ avec p défini tel que l'on peut vérifier par récurrence.

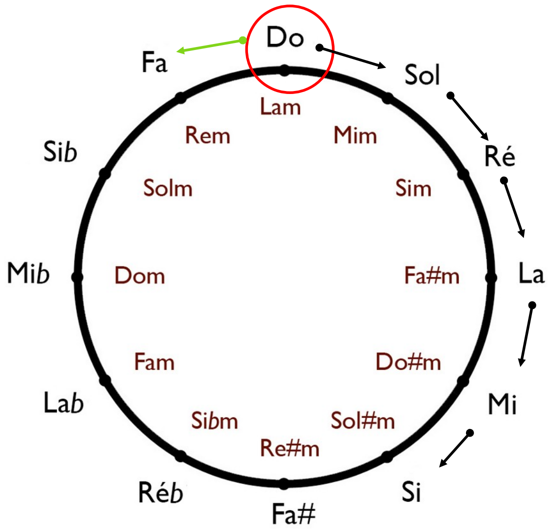
En théorie en répétant l'opération pour {n=1 ; n=2 ; …… n=11} on doit retrouver les 12 notes de la gamme chromatique (do, do#, re, re#, mi, fa, fa#, sol, sol#, la, la#, si). Pour construire une gamme il nous faut donc un nombre fini de notes et donc dans le cas de la gamme chromatique que l'on est par exemple $f_{12} = f_0$ ou encore $f_{24} = f_0$ … Il faut donc que la suite soit périodique et qu'il existe un entier n tel que $f_n = f_0$ ce qui revient a cherché deux entiers n et p tel que : $\frac{3^n}{2^n} \times \left(\frac{1}{2^p}\right) = 1$ ou encore que $3^n = 2^{(n+p)}$ or 3^n est impaire et $2^{(n+p)}$ est pair. Donc $3^n \neq 2^{(n+p)}$ est la suite n'est pas périodique donc le cycle des quintes n'existe pas vraiment en théorie même s'il est très souvent utilisé dans la pratique.

B) La gamme diatonique

Soit la suite $f_n = \frac{3^n}{2^n} \times \left(\frac{1}{2^p}\right) \times f$ des quintes ascendantes avec p défini tel que $f_n \in [f_0, 2f]$ et soit f_0 = fa la première note non dièse et non bémol du cycle des quintes on calcule {n=1 ; n=2 ; …… n=6} et l'on obtient le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
f_n	f	$\frac{3}{2} \times f$	$\frac{3^2}{2^3} \times f$	$\frac{3^3}{2^4} \times f$	$\frac{3^4}{2^6} \times f$	$\frac{3^5}{2^7} \times f$	$\frac{3^6}{2^9} \times f$
Notes	fa	do	sol	re	la	mi	si

On peut observer que l'on retrouve bien les 7 notes de la gamme diatonique, mais pas dans l'ordre. La gamme diatonique est composée par définition des notes non dièse et non bémol (do, re, mi, fa, sol, la, si) et commence par la note Do. Si on se place sur le Do du cycle des quintes on observe qu'il faut 5 quintes ascendantes et une quinte descendante pour obtenir les 7 notes de la gamme diatonique.



Soit les suites $f_n = \frac{3^n}{2^n}\times(\frac{1}{2^p})\times f$ des quintes ascendantes et $f_n = \frac{2^n}{3^n}\times 2^p\times f$ des quintes descendantes avec p défini tel que $f_n \in [f_0, 2f]$ et f_0 = Do. Donc en répétant l'opération pour {n=1 ; n=2 ; …… n=6} avec 5 quintes ascendantes et une quinte descendante, on retrouve les 7 notes de la gamme diatonique que l'on peut remettre dans l'ordre comme on le voit dans le tableau suivant :

n	0	2	4	6	1	3	5	
f_n	f	$\frac{3^2}{2^3}\times f$	$\frac{3^4}{2^6}\times f$	$\frac{2^2}{3}\times f$	$\frac{3}{2}\times f$	$\frac{3^3}{2^4}\times f$	$\frac{3^5}{2^7}\times f$	2f
Notes	do	re	mi	fa	sol	la	si	do

T T L T T T L

La distance entre deux notes n'est pas la même : elle est soit de T = $\frac{9}{8}$ soit de L = $\frac{2^8}{3^5}$. T représente le ton pythagoricien et le L représente le limna pyhragoricien que nous appelons a notre époque le demi-ton. Cette gamme appelé aujourd'hui la gamme de Do Majeur est la gamme diatonique de Pythagore. C'est encore aujourd'hui la gamme de référence.

Pour aller plus loin nous pouvons également étudier le mode mineur. Le relatif mineur de la gamme de Do Majeur et la gamme de La mineur. Si on se place sur le La du cycle des quintes on observe qu'il faut 2 quintes ascendantes et 4 quintes descendantes. Soit f_0 = la on a :

n	0	2	5	3	1	6	4	
f_n	f	$\frac{3^2}{2^3}\times f$	$\frac{2^5}{3^3}\times f$	$\frac{2^2}{3}\times f$	$\frac{3}{2}\times f$	$\frac{2^7}{3^4}\times f$	$\frac{2^4}{3^2}\times f$	2f
Notes	la	si	do	re	mi	fa	sol	la

T L T T L T T

C) La gamme chromatique

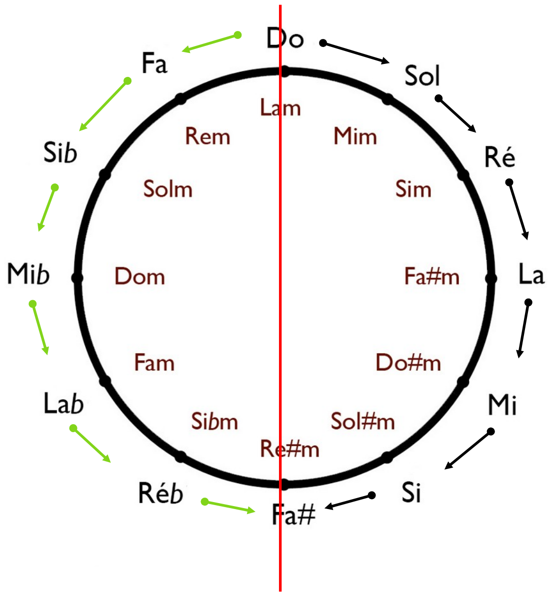
Soit la suite $f_n = \frac{3^n}{2^n}\times(\frac{1}{2^p})\times f$ des quintes ascendantes avec p défini tel que $f_n \in [f_0, 2f]$ et soit f_0 = fa la première note non dièse et non bémol du cycle des quintes on calcule {n=1 ; n=2 ; …… n=11} et on obtient le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
f_n	f	$\frac{3}{2}\times f$	$\frac{3^2}{2^3}\times f$	$\frac{3^3}{2^4}\times f$	$\frac{3^4}{2^6}\times f$	$\frac{3^5}{2^7}\times f$
Notes	fa	do	sol	re	la	mi

n	6	7	8	9	10	11
f_n	$\frac{3^6}{2^9}\times f$	$\frac{3^7}{2^{11}}\times f$	$\frac{3^8}{2^{12}}\times f$	$\frac{3^9}{2^{14}}\times f$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}\times f$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}\times f$
Notes	si	fa#	do#	sol#	ré#	la#

Comme pour la gamme diatonique, on obtient les bonnes notes, mais dans le désordre. La gamme de Do chromatique est composée par définition des notes 12 notes : do, do#, re, re#, mi, fa, fa#, sol, sol#, la, la#, si. On sait que si l'on se place sur le Do du cycle des quintes il nous faut 5 quintes ascendantes et une quinte descendante pour trouver les 7 notes non dièse et non bémol. Pour obtenir les 5 notes altérées de la gamme chromatique en partent du

Do sur le cycle des quintes on voit qu'il nous faut une quinte ascendante et 4 quintes descendantes. En effet, on divise le cycle en deux partie :



Pourquoi procéder comme ça ? En musique on a ce qu'on appel l'ordre des dièses et l'ordre des bémols qui sont : fa, do, sol, re, la, mi, si et si, mi, la, ré, sol, do, fa. En prenant en considération ceci, on divise le cycle des quintes en deux et l'on peut représenter ceci en traçant un très rouge entre Fa et Si en passant par le centre du cercle comme on la fait si dessus entre Do et Fa#. Ici on déplace donc la division du cycle induit par l'ordre des dièses et des bémols pour commencer par Do vu que l'on veut la gamme de Do chromatique (et non la gamme de Fa chromatique).

Soit les suites $f_n = \frac{3^n}{2^n}\times(\frac{1}{2^p})\times f$ des quintes ascendantes et $f_n = \frac{2^n}{3^n}\times 2^p\times f$ des quintes descendantes avec p défini tel que $f_n \in [f_0, 2f]$ et f_0 = Do. Donc en répétant l'opération pour {n=1 ; n=2 ; …… n=11} avec 6 quintes ascendantes et 5 quintes descendantes (on n'a pas besoin d'une 6e quinte descendante, car on a déjà Fa# grâce a la 6e quinte ascendante) on retrouve les 12 notes de la gamme chromatique que l'on peut remettre dans l'ordre comme on le voit dans le tableau suivant :

n	0	7	2	9	4	11
f_n	f	$\frac{2^8}{3^5}\times f$	$\frac{3^2}{2^3}\times f$	$\frac{2^5}{3^3}\times f$	$\frac{3^4}{2^6}\times f$	$\frac{2^2}{3}\times f$
Notes	do	reb	re	mib	mi	fa

$\frac{2^8}{3^5}$ $\frac{3^7}{2^{11}}$ $\frac{2^8}{3^5}$ $\frac{3^7}{2^{11}}$ $\frac{2^8}{3^5}$ $\frac{3^7}{2^{11}}$

n	6	1	8	3	10	5
f_n	$\frac{3^6}{2^9}\times f$	$\frac{3}{2}\times f$	$\frac{2^7}{3^7}\times f$	$\frac{3^3}{2^4}\times f$	$\frac{2^4}{3^2}\times f$	$\frac{3^5}{2^7}\times f$
Notes	fa#	sol	lab	la	sib	si

$$\frac{3^7}{2^{11}} \qquad \frac{2^8}{3^5} \qquad \frac{3^7}{2^{11}} \qquad \frac{2^8}{3^5} \qquad \frac{3^7}{2^{11}}$$

En théorie il y a un demi-ton entre chacune de ces notes cependant on peut observer que ce n'est pas le cas. On a dit plus tôt que T = $\frac{9}{8}$ est le ton pythagoricien et L = $\frac{2^8}{3^5}$ est le L représente le limna pythagoricien. Et on peut observer que T-L = $\frac{3^7}{2^{11}}$ et donc

$$L = \frac{2^8}{3^5} < \frac{3^7}{2^{11}} = T\text{-}L \ .$$

On a obtenu Fa# par une quinte ascendante alors que l'on a obtenu les notes bémol par des quintes descendantes, car quand on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre (quintes ascendantes) on a des notes dièse et dans le sens inverse les notes bémol. En effet si l'on observe l'ordre des bémols et des dièses de plus près, l'ordre des bémols est en réalité l'ordre des dièses à l'envers. D'ou l'idée que le dièse est un demi ton que l'on ajoute à une note et que le bémol est un demi ton que l'on enlève à la note.

On à donc entre Do et Do#, $\frac{3^7}{2^{11}}$ mais entre Do et Réb on à $\frac{2^8}{3^5}$. La note dièse suivante à une note donnée à donc une fréquence plus élevée que la note bémol qui suit. Le rapport entre L et T-L est de $\frac{3^{12}}{2^{19}}$ ce qui correspond au comma pythagoricien. Par définition on dit aujourd'hui que Do# et Réb sont les mêmes notes, mais on voit ici que dans la gamme pythagoricienne ce n'est pas le cas. Ce qu'on appelé la gamme tempérée essayera de corrigé ce problème ainsi que celui de la quinte du loup par la suite.

Chapitre 2 : La dimension mathématique caches dans les fugues de J. S. Bach

I – Brève biographie de J. S. Bach

J. S. Bach est né à Eisenach en Thuringe le 21 mars 1685 et mourut à Leipzig le 28 Juillet 1750. Il est issu d'une famille de musiciens dont un grand nombre étaient organistes. Johann Sebastian Bach est le huitième enfant de Maria Elisabetha Lämmerhirt et Johann Ambrosius. Bach est familiarisé avec la musique dès son plus jeune âge avec son père violoniste et un de ses parents compositeurs et organiste de l'église Saint-Georges d'Eisenach.

De 1692 à 1695, il suit des cours à la Lateinschule puis intégra le lycée d'Orhdruf. En 1700 il est accepté dans un réputé lycée, le Michaelischule où il intègre le choral le Mettenchor. Bach ayant une belle voix de soprano il peut donc suivre gratuitement sa scolarité dans le lycée. À cette époque il se rendait régulièrement à pied, parcourant cinquante kilomètres, pour aller écouter des grands maîtres a Hambourg.

En 1702 il est organiste à la Jakobkirche de Sangerhausen mais Johann Augustin Kobelius prend son poste en novembre 1702. En mars 1703 il est violoniste à la cour du duc Johann Ernst de Saxe-Weimar. Le 9 août de la même année il prend le poste d'organiste à l'Eglise-Neuve d'Arnstadt où il gagne 80 florins ce qui est un salaire confortable pour un jeune organiste de l'époque. Le 15 juin 1707, il est élu organiste à l'église Saint-Balise de Mülhausssen. Le 17 octobre il se marie avec Maria Barbara.

Le 4 février 1708, il édite pour la première fois une de ses œuvres, la cantate Gott ist mein Köning (BWV 71). Il ne resta que quelques mois à Mülhaussen et devient organiste de la chapelle de la cour du prince régnant de Saxe-Weimar. Ce sera à Weimar qu'il composera l'essentiel de son œuvre pour orgue et musique religieuse. Il y découvrit aussi la musique de Vivaldi. C'est à Coethen qu'il composa les concertos Brandebourgeois, le clavier bien tempéré I et les suites anglaises et françaises.

En 1720, son épouse décède et il se remaria en 1721 avec Anna Magdalena Wilcken une chanteuse professionnelle. Ce n'est que durant l'été 1722 qu'il deviendra le cantor de la Thomaskirche à Leipzig et sera en charge de l'école, la Tomasschule. Il est aussi directeur de musique de quatre autres églises, il est chargé de l'entretien des orgues de deux églises, directeur de la musique de la ville et de l'université. À Leipzig il composa un grand répertoire de cantate religieuse. Il devait en composer deux par semaine. Plus de 200 de ces cantates nous sont parvenues. En 1727 il crée sa Passion selon Saint Mathieu. En 1729 il reprend la direction du Collegium Musicum créé par Telemann à l'université.

À partir des années 1730 Bach fait imprimer sa musique. En novembre 1736 il est nommé maître de chapelle de Leipzig mais seulement à titre honorifique, il ne recevra pas d'honoraire pour ce titre. C'est à Leipzig qu'il composa la messe en si mineur, les Variations Goldberg, les variations canoniques, le clavier bien tempéré II et L'art de la fugue qu'il n'acheva pas. En 1747 il est admis à la « Société des sciences musicales » dirigée par Laurenz Mizler. À cette occasion il produit des contrepoint « scientifiques » les variations pour orgue Vom Himmel Hoch, en 1748 l'Offrande musicale et des canons énigmatiques en 1749. En 1750 quelques mois avant de décéder, Bach se fait opérer deux fois les yeux car il est atteint de cataracte avant de décéder.

II – Les matrices prédictives relevées par Zoltan Goncz

A) Contrepoint 14 de l'art de la fugue (BWV. 1080)

En 1991, un certain Zoltan Göncz publia une découverte surprenante sur le quatorzième contrepoint de l'Art de la fugue. Il explique avec certitude comment J. S. Bach aurait prévu l'apparition du quatrième thème. La particularité du quatorzième contrepoint est que Bach y utilise les entrées en strettes pour toutes les expositions de chaque thème. Dans l'exposition des trois premiers thèmes, il programme en même temps la strette en permutation qui suivra puis utilise cette exposition comme algorithme pour le quatrième thème.

On note dans un tableau à 4 lignes, représentant les 4 voix polyphoniques et à un certain nombre de colonnes, représentant le temps, l'apparition des thèmes (sujets) :

			1				1			1		1			2		
		1				1	1		1	1	1	1		2			
	1				1				1		1	1					2
1				1				1			1		1			2	

2		1	1			3				3					2	1	3
	2		1		3				3				3	2	1	3	1
	1	2		3				3					3	3		3	2
1			2				3				3	3		1	3	2	3

3	4	3	3	1	2	4
2	3	2	1	4	3	3
1	2	1	4	3	1	2
1	1	4	2	3	4	1

Grâce à cette analyse de la partition, on peut en déduire 3 matrices qui correspondent à l'apparition des 3 premiers thèmes :

$$A1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ; } B1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si l'on additionne ces trois matrices, on obtient :

$P1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ si on remplace 0 par 4 on a : $Q1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Et si on fait

Q1-P1 on obtient la matrice qui correspond à l'apparition du 4e thème :

$D1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc grâce aux matrices A1, B1, C1 on trouve l'ordre d'apparition du 4e thème en fonction des 4 voix et du temps que l'on peut vérifier en analysant la partition.

B) Fugues en *DO* mineur (BWV. 562)

On effectue le même travail que pour le 14e contrepoint de l'art de la fugue avec la Fugues en *DO* mineur :

		1	2		1		1		1		1
	1	2				1	1			1	
1	2					1			1	2	
			1	2						1	2
				1	2			1	2		1

	3	4	5	5	3		4	4	4
3	4	5			5	4		5	3
			3	4		5	3	3	
		3	4	3	4	3			

1	3	6		3	1	3			1	3	1
3	6	1	3	6			3	6	6	3	3
	1	3	6	1	3	6	1	3	3	1	6
			1		1	1	6	1			

Grâce à cette analyse de la partition, on peut en déduire 3 matrices qui correspondent à l'apparition des 3 premiers thèmes :

$$A2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; B2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; C2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque une ressemblance avec les 3 matrices A1, B1, C1 du contrepoint 14 de l'Art de la fugue. En effet, on a : A2 = $C1 \div 3$; B2 = $A1 \times 2$ et C2 = $B1 \times (\frac{2}{3})$

On déduit également 2 autres matrices grâce à l'analyse de la partition pour les 4e et 5e thèmes :

D2 = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; E = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on remarque que D2 = $A2 \times 4$ ou bien $C1 \times (\frac{3}{4})$.

Si l'on additionne C2, D2 et E on obtient : P2 = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Et si on remplace 0 par 6 on a : Q2 = $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Et si on fait Q2-P2 on obtient la matrice qui correspond à l'apparition du 6e thème : F = $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or en versifiant sur la partition nous devrions avoir plutôt F = $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette erreur est du au fait que le thème 5 n'est joué que sur 3 voix (au lieu de 4) donc nous devrions avoir E =, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais Bach a choisit de ne faire entendre ce thème que sur 3 voix. Donc grâce aux matrices C2, D2 et E on trouve l'ordre d'apparition du 6e thème en fonction des 4 voix et du temps à une erreur prés du au choix du compositeur.

III – Démonstration sur d'autres fugues du *Clavier bien tempéré*

Essayons d'utiliser la même démarche que Zoltan Goncz sur des fugues du Clavier bien tempéré.

A) Fugues n°2 du *Clavier bien tempéré*

Analysons la partition et retranscrivons l'apparition des thèmes dans un tableau comme précédemment :

	1	2	1	2	1	3	1
1	2	3	3	1	2	1	
		1	2	3	3	2	

Grâce a cette analyse de la partition, on peut en déduire 2 matrices qui correspondent à l'apparition des 2 premiers thèmes :

$$A3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si l'on additionne ces deux matrices on obtient : $P3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si on remplace 0 par 3 on a : $Q3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Et si on fait Q3-P3 on obtient la matrice qui correspond à l'apparition du 3e thème : $C3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Donc grâce aux matrices A3 et B3 on trouve l'ordre d'apparition du 3e thème en fonction des 3 voix et du temps que l'on peut vérifier en analysant la partition.

B) Fugues n°3 du *Clavier bien tempéré*

Analysons la partition et retranscrivons l'apparition des thèmes dans un tableau comme précédemment :

1	2	3	1	2	3	1	2
	1	2	2		1	4	1
		1	4	1	2	2	3

..... ETC.

Grâce a cette analyse de la partition, on peut en déduire 3 matrices qui correspondent à l'apparition des 3 premiers thèmes :

$$A4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; B4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Si l'on additionne ces trois matrices on obtient : $P4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Si on remplace 0 par 4 on a : $Q4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Et si on fait Q4-P4 on obtient la matrice qui correspond à l'apparition du 4e thème : $D3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc grâce aux matrices A4, B4, C4 on trouve l'ordre d'apparition du 3e thème en fonction des 3 voix et du temps que l'on peut vérifier en analysant la partition.

Conclusion :

Pour conclure, que ce soit dans le fondement même de la gamme en musique ou de technique d'écriture de fugue les mathématiques sont présentes. Cependant, cet aspect scientifique de la musique est le plus souvent invisible et dissimulé aux yeux de ceux qui la pratiquent.

Il serait intéressant dans un prochain travail de traiter le cas de la gamme tempéré que nous utilisons aujourd'hui et de continuer l'expérience sur les fugues de Bach. Il serait également intéressant de faire la même chose qu'avec les Fugues de Bach avec d'autre compositeur de l'époque Baroque (est d'autres) pour voir si c'est une technique propre à Bach ou non. Donc les deux questions seraient : La gamme tempérée résout-elle les problèmes de la gamme pythagoricienne ? Bach est-il le seul compositeur à écrire ses fugues ainsi ?

Bibliographie

Caroline Traube, « Quelle place pour la science au sein de la musicologie aujourd'hui ? », in *Les Presses de l'Université de Montréal*, 2014, vol.24 n° 2, p. 41-49.

Francisque, *Le secret de Pythagore dévoilé, ou Le fond de la musique : consistant dans la règle des inventeurs de cet art, qui conduit à l'unité de mesure des intervalles des sons, aux gammes fondamentales, et aux rapports des faits naturels de l'harmonie avec les divisions du temps déterminées par le système solaire... / par Francisque*, Impr. de Mercier (Rochefort), 1869, 83 pages.

Göncz, « The Permutational Matrix in J. S. Bach's Art of Fugue. The Last Fugue Finished? », in *Studia Musicologica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1991, vol.33 n° 1/4, p. 109-119.

James Pressler, *Bach - Completed Fugue in C minor BWV 562*, mai 2009, 5:31.

Jean Lattard et Claude Valette, *Musique : gammes et tempéraments de Pythagore aux simulations informatiques*, Paris, Diderot Editeur, 1997, 219 pages.

Netherlands Bach Society, *Bach - Contrapunctus 14 - Reconstruction by Z. Göncz (improved quality)*, octobre 2015, 15:36.

PASCAL Carine et TOMAS Nathalie, *Maths et musique : La musique est un exercice caché d'arithmétique tel que l'esprit ignore qu'il compte (Leibnitz, 1712)*, TER, Faculté des Sciences de Luminy, Université de la Méditeranée, Année universitaire 1999-2000, 83 pages.

SAULNERON Charlotte, « Pythagore ou les origines de la gamme | ResMusica »[En ligne]. Disponible sur : https://www.resmusica.com/2018/08/13/pythagore-ou-les-origines-de-la-gamme/

Shores, « Pythagoras' Natural Computers: The Wild Cosmic Computation of Melodies and Flowers », Blog *Pirates & Revolutionaries*, 2009 [En ligne]. Disponible sur : http://piratesandrevolutionaries.blogspot.com/2009/04/pythagoras-natural-computers-wild.html.

XIV. Récital Johann Sebastian Bach, 2015, [En ligne]. Disponible sur : https://www.espace-dam.ch/3127-xiv-recital-johann-sebastian-bach/, [consulté le 31 décembre 2020].

A c-moll fantázia és fúga (BWV 562) második tétele töredékesen maradt fenn, [En ligne]. Disponible sur : http://www.bachorgan.com/Comps/c-moll.html, [consulté le 29 décembre 2020].

Jean-Sébastien Bach, [En ligne]. Disponible sur : http://classic-intro.net/introductionalamusique/compositeurs/Bach-JS.html, [consulté le 29 décembre 2020].

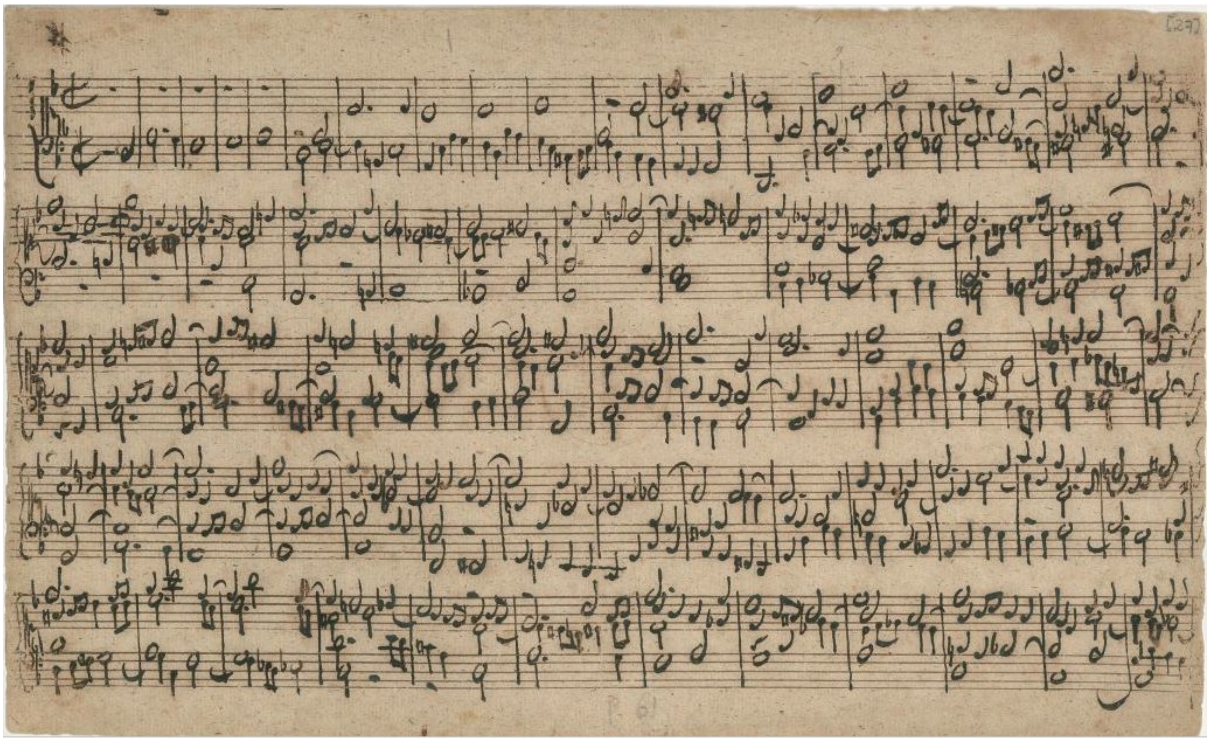
cycle-quinte1.jpg (1107×936), [En ligne]. Disponible sur : https://compositiondemao.com/wp-content/uploads/2015/08/cycle-quinte1.jpg, [consulté le 31 décembre 2020c].

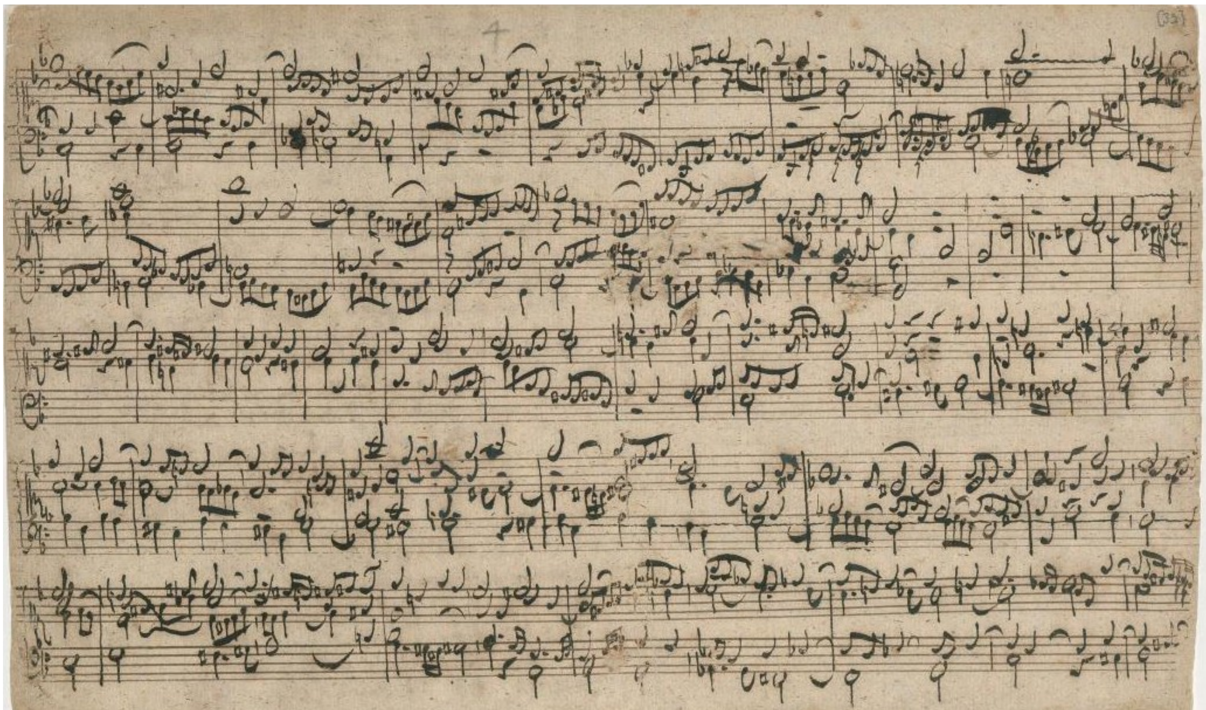
Fugue analysis, [En ligne]. Disponible sur : http://www.algomus.fr/fugues/bach/, [consulté le 31 décembre 2020].

La gamme pythagoricienne, [En ligne]. Disponible sur : https://edutheque.philharmoniedeparis.fr/la-gamme-pythagoricienne.aspx, [consulté le 31 décembre 2020d].

Raphaël 1520-2020 : ce que nous apprend « L'Ecole d'Athènes », [En ligne]. Disponible sur : http://solidariteetprogres.fr/documents-de-fond-7/culture/raphael-1520-2020-peinture-renaissance.html, [consulté le 31 décembre 2020e].

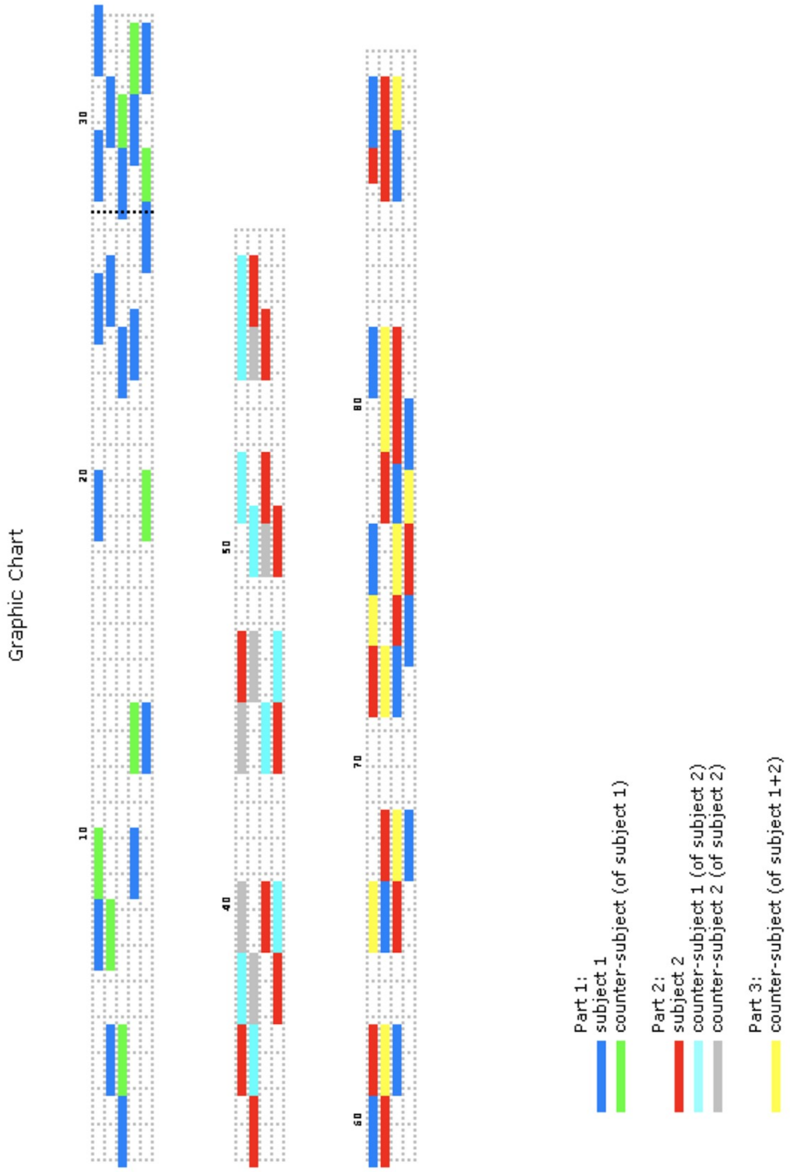
Annexe 1 : Le 14e contre point de l'art de la fugues de J. S. Bach partition manuscrite autographe.






NB Ueber dieser Fuge, wo der Nahme
B A C H im Contrasubject
angebracht worden, ist
der Verfaßer gestorben.

Annexe 2 : Analyse Fugues en *DO* mineur (BWV. 562) de J. S. Bach par Zoltan Goncz



Zoltán Göncz

Budapest, July 17, 2003

Annexe 3 : Analyse de référence réalisé par un musicologue utilisé par Algomus pour créer un algorithme qui analyserais les partitions des fugues 2 et 3 du *Clavier bien tempéré* de J. S. Bach.